Hydroinformatik - SoSe 2026

UW-BHW-414-13: Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr.-Ing. habil. Olaf Kolditz

[1]Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

[2]Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

[3]Center for Advanced Water Research – CAWR

[4]TUBAF-UFZ Center for Environmental Geosciences – C-EGS, Freiberg / Leipzig

Dresden, 19.06.2026

Technische Universität Dresden

Zeitplan: Hydroinformatik I+II

Sommersemester 2026: Stand: 06.04.2026

Nr.	KW	Datum	ID	Thema
01+02	16	17.04.2026	UW-BHW-414-01/02	Einführung in die Vorlesung, Umweltinformatik
03	16	17.04.2026	UW-BHW-414-03	Werkzeuge, Hello World (in C++)
05	17	24.04.2026	UW-BHW-414-04	Selbststudium: Software-Installationen
07	19	08.05.2026	UW-BHW-414-05	Objekt-Orientierte Programmierung: C++, Klassen
09	20	15.05.2026	UW-BHW-414-06	Programmiersprache Python
11	21	22.05.2026	UW-BHW-414-07/08	Modellierung, Digitalisierung - Wasser 4.0
00	22	29.05.2026		Vorlesungsfreie Woche
13	23	05.06.2026	UW-BHW-414-09/10	KI, Maschinelles Lernen, Neuronale Netzwerke
15	24	12.06.2026	UW-BHW-414-11/12	Kontinuumsmechanik, Hydromechanik
17	25	19.06.2026	UW-BHW-414-13/14	Differentialgleichungen, Näherungsverfahren
19	26	26.06.2026	UW-BHW-414-J	Finite-Differenzen, explizite Verfahren
21	27	03.07.2026	UW-BHW-414-K	Finite-Differenzen, implizite Verfahren
23	28	10.07.2026	UW-BHW-414-L	Gerinnehydraulik, Grundwasserhydraulik
25	29	17.07.2026	UW-BHW-414-M	Grundwasserhydraulik
27	30	24.07.2026	UW-BHW-414-N	Zusammenfassung, Klausurvorbereitung

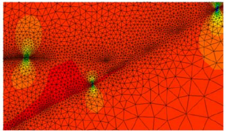
Technische Universität Dresden

Fahrplan für heute ...

1. UW-BHW-414-13: Partielle Differentialgleichungen
   - Semesterplan

Vorlesungskonzept

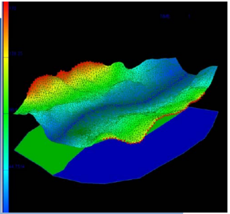
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v}^E \nabla\psi$$



Basics

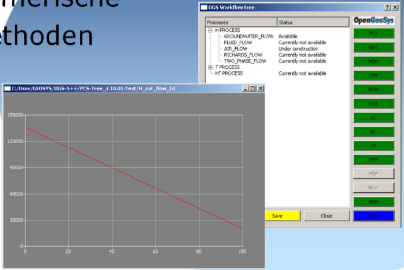
Mechanik

Anwendung



Numerische

Methoden



Programmierung

Visual C++

Prozessverständnis

Technische Universität Dresden

Fahrplan für heute

0 Kontinuums- und Hydromechanik

---

1 Konzept: Generelle Erhaltungsgesetze (Mechanik) zur Mathematik (PDEs)
2 Partielle Differentialgleichungen (PDE)
3 Klassifikationen
4 Einfache Beispiele (Python-Übungen)
5 Anfangs- und Randbedingungen

---

6 Näherungsverfahren (numerische Verfahren)

Dimensionsanalyse

Navier-Stokes Equation (NSE)

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}} \qquad (1)$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

K-Frage: Erläutern Sie die physikalische Bedeutung der Terme der NSE.

Technische Universität Dresden

Mathematical Classification (1.5)

A common formulation of a PDE in $\mathcal{R}^3$ is

$$L(\psi) = F(t, x_i, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial^n \psi}{\partial x_i^n}) = 0 \quad , \quad i = 3 \tag{2}$$

where L is s differential operator. Second-order PDE with two independent variables are given by

$$A\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \psi}{\partial x} + E\frac{\partial \psi}{\partial y} + F\psi + G = 0 \tag{3}$$

Second-order PDEs with more independent variables can be classified by examination of the eigenvalues of the matrix a_{ij}.

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \frac{\partial \psi^2}{\partial x_i \partial x_j} + G = 0 \quad , \quad a_{ii} = \lambda_i \quad \text{Eigenvalues} \tag{4}$$

Technische Universität Dresden

Mathematical Classification (1.5)

PDE type	Discriminant	Eigenvalues	Canonical form	Example
Elliptic	$B^2 - 4AC < 0$ complex characteristics	$\forall\lambda > 0$ equal signs	$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = 0$	Laplace equation
Parabolic	$B^2 - 4AC = 0$	$\exists\lambda = 0$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = G$	Diffusion, Burgers equations
Hyperbolic	$B^2 - 4AC > 0$ real characteristics	$\exists\lambda < 0$ different signs	$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = 0$	Wave equation

Technische Universität Dresden

General Balance Equation (1.1.7)

- Integral form

$$\int_\Omega \frac{d\psi}{dt} d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \nabla\cdot(\mathbf{v}\psi) d\Omega - \int_\Omega \nabla\cdot(\mathbf{D}^\psi \nabla\psi) d\Omega = \int_\Omega Q^\psi d\Omega \tag{5}$$

- Differential form

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{v}\psi) - \nabla\cdot(\mathbf{D}^\psi\nabla\psi) = \mathbf{Q}^\psi \tag{6}$$

PDE: Definition

Mechanics notation:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi) - \nabla \cdot (\mathbf{D}^{\psi} \nabla \psi) = Q^{\psi} \quad (7)$$

Mathematical notation:

A common formulation of a PDE in $\mathcal{R}^3$ is

$$L(\psi) = F(t, x_i, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial^n \psi}{\partial x_i^n}) = 0 \qquad , \qquad i = 3 \quad (8)$$

where L is s differential operator.

PDE: Klassifikation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi) - \nabla \cdot (\mathbf{D}^{\psi}\nabla\psi) = Q^{\psi} \qquad (9)$$

Physical problem	Math. problem	Examples
Equilibrium problems	Elliptic equations	Irrotational incompressible flow Inviscid incompressible flow Steady state heat conduction
Propagation problems (infinite propagation speed)	Parabolic equations	Unsteady viscous flow Transient heat transfer
Propagation problems (finite propagation speed)	Hyperbolic equations	Wave propagation (vibration) Inviscid supersonic flow

- Parabolisch: Diffusion, Gerinne (nichtlinear)
- Elliptisch: Grundwasser (stationär)

Technische Universität Dresden

Elliptische Gleichungen

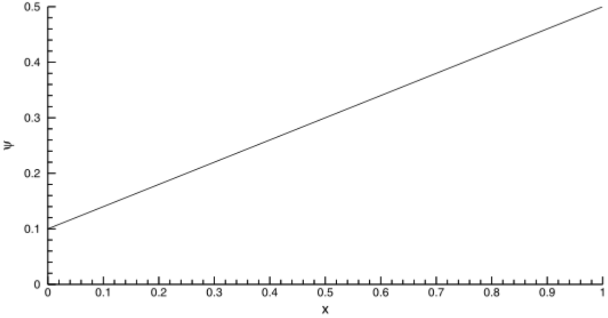
Stationäre Probleme

Technische Universität Dresden

PDE: Elliptic Equation 1-D

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \tag{10}$$

$$\psi = ax + b \tag{11}$$



z.B. stationäre Wärmeleitung oder Stoffdiffusion

PDE: Elliptic Equation 2-D

The prototype of an elliptic equation is the Laplace equation.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

By substitution it can be easily verified that the exact solution of the Laplace equation is

$$\psi = sin(\pi x) exp(-\pi y) \tag{13}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi cos(\pi x) exp(-\pi y), \frac{\partial \psi}{\partial y} = ..., \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = ..., \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = ... \tag{14}$$

$\Rightarrow$ Hausaufgabe (am Ende)

Technische Universität Dresden

PDE: Elliptic Equation 2-D

Divergenzfreie Strömung

The prototype of an elliptic equation is the Laplace equation.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

$$\psi(x, y) = \int \left(\frac{x - L}{(x - L)^2 + y^2} - \frac{x + L}{(x + L)^2 + y^2} \right) dx\, dy \tag{16}$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x - L}{(x - L)^2 + y^2} - \frac{x + L}{(x + L)^2 + y^2} \tag{17}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{(x - L)^2 + y^2} - \frac{y}{(x + L)^2 + y^2} \tag{18}$$

$\Rightarrow$ Randbedingungen sind wichtig

Technische Universität Dresden

PDE: Elliptic Equation 2-D

Divergenzfreie Strömung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{y^2 - (x-L)^2}{\left[(x-L)^2 + y^2\right]^2} - \frac{y^2 - (x+L)^2}{\left[(x+L)^2 + y^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{(x-L)^2 - y^2}{\left[(x-L)^2 + y^2\right]^2} - \frac{(x+L)^2 - y^2}{\left[(x+L)^2 + y^2\right]^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{y^2 - (x-L)^2}{\left((x-L)^2 + y^2\right)^2} - \frac{y^2 - (x+L)^2}{\left((x+L)^2 + y^2\right)^2} \\ &\quad + \frac{(x-L)^2 - y^2}{\left((x-L)^2 + y^2\right)^2} - \frac{(x+L)^2 - y^2}{\left((x+L)^2 + y^2\right)^2} \\ &= \frac{y^2 - (x-L)^2 + (x-L)^2 - y^2}{\left((x-L)^2 + y^2\right)^2} - \frac{y^2 - (x+L)^2 + (x+L)^2 - y^2}{\left((x+L)^2 + y^2\right)^2} = 0\end{aligned}$$

Technische Universität Dresden

Divergenzfreie Strömung

Übung: EX22-divergenzfreie-stroemung.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# set up a normalized grid:
dim= 20
xarray= np.arange(-dim,dim)
yarray= np.arange(-dim,dim)
# (fluid) flow from a source at L to a sink at -L:
L = dim/2
x,y = np.meshgrid(xarray,yarray)
vx = (x-L)/((x-L)**2+y**2) - (x+L)/((x+L)**2 +y**2)
vy = y/((x-L)**2+y**2) - y/((x+L)**2 +y**2)
# plot the flow lines:
plt.figure()
plt.quiver(x,y, vx, vy, pivot='mid')
plt.xlabel("$x$-axis")
plt.ylabel("$y$-axis")
plt.axis('equal')
plt.show()
```

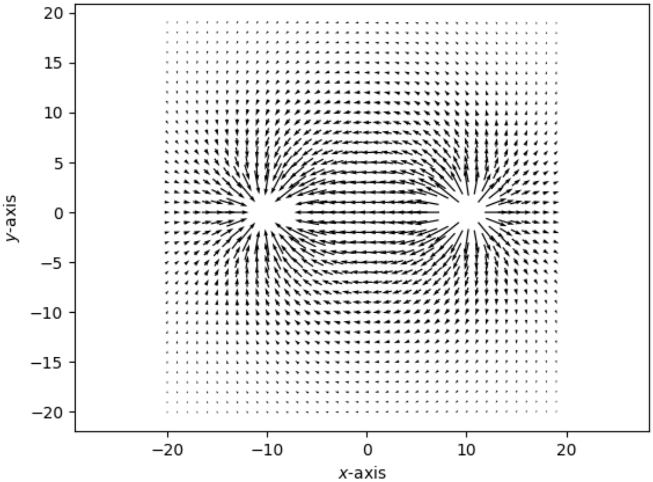
Listing: Python code for divergence-free flow (div v equals 0)

Source: https://auckland.figshare.com/articles/dataset/Chapter_6_Divergence_of_a_vector_field/5732421

Technische Universität Dresden

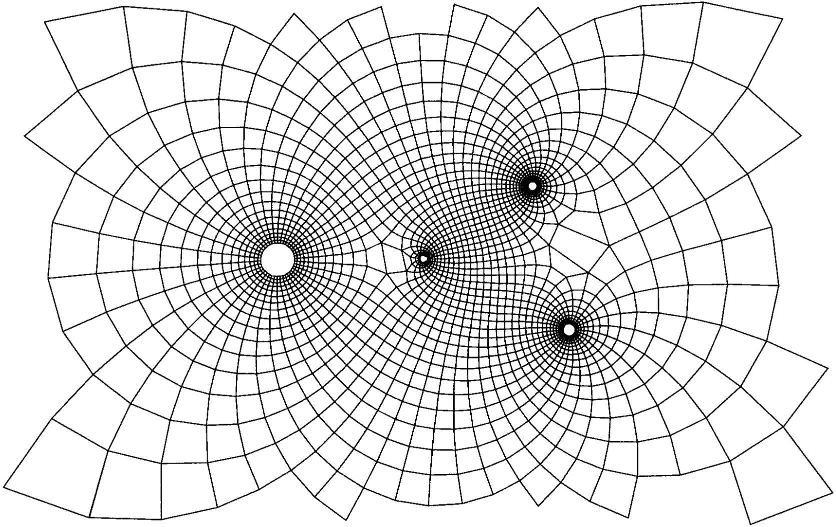
Divergenzfreie Strömung

Übung: EX22-divergenzfreie-stroemung.py



Technische Universität Dresden

PDE: Elliptic Equation 2-D



Technische Universität Dresden

Parabolische Gleichungen

Instationäre Probleme

Technische Universität Dresden

PDE: Parabolic Equation 1-D

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{19}$$

Proof the following solutions on correctness:

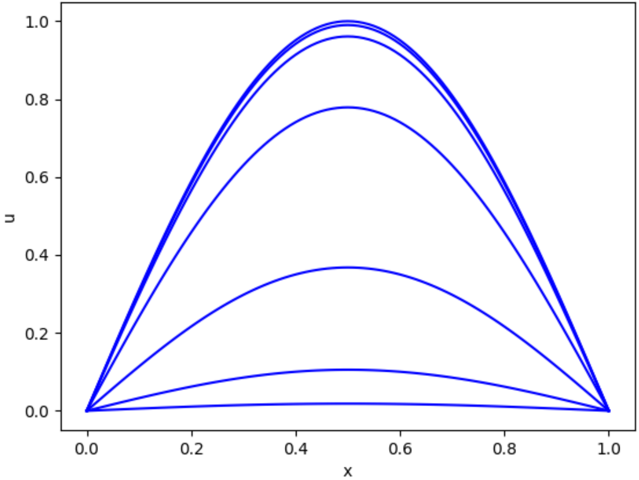
$$\psi(t,x) = sin(\sqrt{\pi\alpha}x)exp(-\pi t) \tag{20}$$

$$\psi(t,x) = sin(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}x)exp(-\pi^2 t) \tag{21}$$

$$\psi(t,x) = sin(\pi x)exp(-\alpha\pi^2 t) \tag{22}$$

Technische Universität Dresden

PDE: Parabolic Equation 1-D



https://github.com/OlafKolditz/Hydroinformatik-II/blob/master/EX06-parabolische-gleichung-1D.py

PDE: Hyperbolic Equation 1-D

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

$\Rightarrow$ Übung

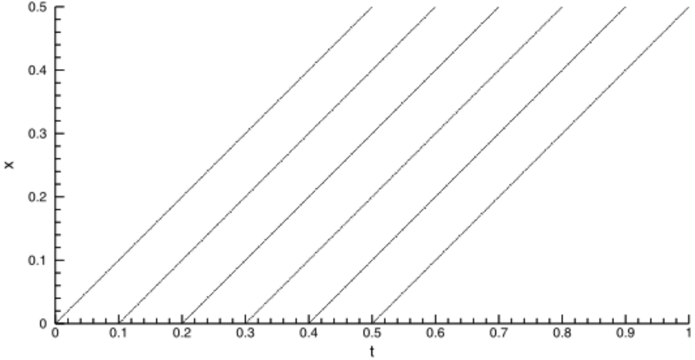
PDE: Hyperbolic Equation 1-D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} = 0 \tag{24}$$

$$\psi(t, x) = a \cos(\frac{\pi c t}{L}) \sin(\frac{\pi x}{L}) \tag{25}$$

PDE: Hyperbolic Equation 1-D - Characteristics

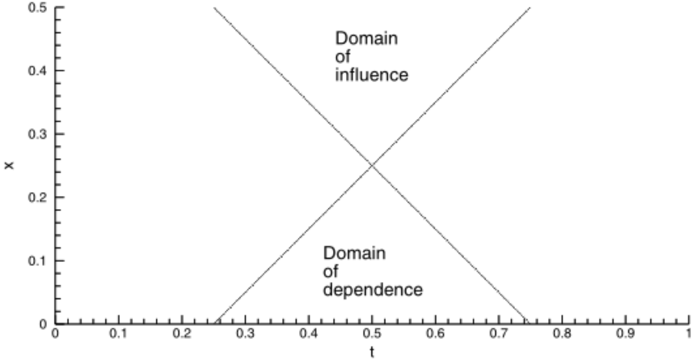
$$A\frac{\partial\psi}{\partial t} - B\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (26)$$



Technische Universität Dresden

PDE: Hyperbolic Equation 1-D - Characteristics

$$A\frac{\partial\psi}{\partial t} - B\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{27}$$



PDE: Hyperbolic-Parabolic Equation 1-D

Transportgleichung (advection-diffusion equation ADE)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + D_{xx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{28}$$

$\Rightarrow$ Übung

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi) - \nabla \cdot (\mathbf{D}^{\psi} \nabla \psi) = \mathbf{Q}^{\psi} \tag{29}$$

Technische Universität Dresden

PDE: Equation Types

The following table gives typical examples of balance equations for the denoted quantities and their PDE types.

Physics	Equation structure	Examples
Continuity	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$	Laplace equation
Mass/energy	$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$	Fokker-Planck equation
Momentum	$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x}] = 0$	Navier-Stokes equation

Technische Universität Dresden

Boundary Conditions I

The following table gives an overview on common boundary condition types and its mathematical representation.

Table: Boundary conditions types

Type of BC	Mathematical Meaning	Physical Meaning
Dirichlet type	ψ	prescribed value potential surface
Neumann type	$\nabla\psi$	prescribed flux stream surface
Cauchy type	$\psi + A\nabla\psi$	resistance between potential and stream surface

Technische Universität Dresden

Boundary Conditions II

To describe conditions at boundaries we can use flux expressions of conservation quantities.

Table: Fluxes through surface boundaries

Quantity	Flux term
Mass	$\rho \mathbf{v}$
Momentum	$\rho \mathbf{v}\mathbf{v} - \sigma$
Energy	$\rho e \mathbf{v} - \lambda \nabla \mathbf{T}$

Technische Universität Dresden

Aufgabe: Prüfen sie die Gültigkeit der Lösungen für die partiellen Differentialgleichungen: (14), (20), (21), (22), (25).

Lösungsweg: Berechnen sie hierfür die entsprechenden partiellen Ableitungen und setzen sie diese dann in die entsprechenden Gleichungen (14), (20), (21), (22), (25) ein.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \ldots \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \ldots \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \ldots \quad , \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \ldots \tag{31}$$

Farbcode

Vorlesung

Übung

Selbststudium (Hausaufgabe)

Klausur

Übersicht

Technische Universität Dresden

Übungen
Mechanik

Technische Universität Dresden

Übungen: Hydroinformatik

GitHub-Repo: `https://github.com/OlafKolditz/Hydroinformatik-2026`

- **EX20: Jupyter Notebook**
- **EX21: Kontinuumsmechanik: Skalarprodukt**
- **EX22: Hydromechanik: Divergenzfreie Strömung**
- EX23: Analytische Lösung: Elliptische Gleichung
- **EX24: Analytische Lösung: Parabolische Gleichung (Diffusion)**
- EX25: Analytische Lösung: Transportgleichung (ADE)
- EX26: Finite-Differenzen-Methode (FDM) explizit
- EX27: Finite-Differenzen-Methode (FDM) implizit
- EX28: Gerinnehydraulik

Technische Universität Dresden

Hausaufgaben

Hausaufgaben: Hydroinformatik

Hydroinformatik II - HyBHW-1-02

1. Skalarprodukt: Schreiben sie das Skalarprodukt $\nabla \cdot \mathbf{v}$ in Komponentenschreibweise.
2. Mechanik: Was ist $\mathbf{v} \cdot \nabla\psi$? Physikalische Bedeutung des Terms
3. Mechanik: Was ist Φ^ψ? Physikalische Bedeutung des Terms
4. Hydromechanik: Komponentenschreibweise $\nabla \cdot (\mathbf{v}\psi)$
5. Hydromechanik: Komponentenschreibweise $\nabla \cdot (\mathbf{D}^\psi \nabla\psi)$
6. Analytik: Prüfen Sie die Gültigkeit einer der Lösungen für die Diffusionsgleichung: (20), (21), (22) (siehe Vorlesung 5 $>>$ HyBHW-S2-01-V05).
7. Analytik: Stellen Sie die ausgewählte analytische Lösung für die 1-D parabolische Differentialgleichung unter Verwend der Übung EX06-parabolische-gleichung-1D.py dar. Ergänzen Sie Ihren Namen oder Matrikelnummer mit dem Befehl `plt.title("Name oder Matrikelnummer")`.
8. Numerik: Darstellung der numerischen Lösung (explizite FDM) für die 1-D parabolische Differentialgleichung (EX08-fdm-explicit-python). Produzieren Sie eine stabile und instabile Lösung.
9. Numerik: Darstellung der numerischen Lösung (implizite FDM) für die 1-D parabolische Differentialgleichung (EX09-fdm-implicit-python). Produzieren Sie die stationäre Lösung.

Technische Universität Dresden

Hausaufgaben: Hydroinformatik

Beispiel: Aufgaben 7-9

- zum Internet-Repository gehen (Webseite)
- Python-File editieren (Matrikel-Nummer oder Name)
- Programme zum Rechnen und Darstellen ausführen
- Ergebnis (Abbildung) in die Hausaufgaben einfügen

Technische Universität Dresden